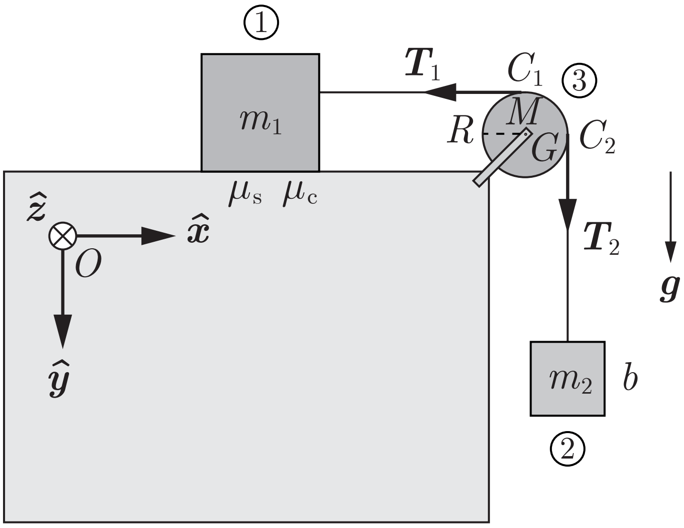
1. Système avec frottement (6.5/20 points)

Nom :

Prénom :

N° Sciper :



Un bloc 1, considéré comme un point matériel de masse m_1, est posé sur un plan horizontal et attaché à un fil inextensible de masse négligeable qui passe au-dessus d'une poulie 3 de masse M et de rayon R. Un bloc 2, considéré comme un point matériel de masse m_2, est suspendu à l'autre extrémité du fil. Le frottement sec entre le bloc 1 et le plan horizontal est caractérisé par un coefficient de frottement statique μ_s et un coefficient de frottement cinétique μ_c. Le frottement visqueux entre le bloc 2 et l'air est caractérisé par la force de frottement $\boldsymbol{F}_{f,2} = -\,b\,\boldsymbol{v}_2$ où $\boldsymbol{v}_2$ est la vitesse du bloc 2 et le coefficient $b > 0$. Le mouvement de rotation propre de la poulie 3 est caractérisé par le moment d'inertie $\lambda\,MR^2$, où $1/2 \leqslant \lambda \leqslant 1$, par rapport à l'axe de rotation horizontal qui passe par son centre de masse G.

Le fil se déplace avec le mouvement de rotation propre de la poulie 3 sans glisser. Ce mouvement est caractérisé par les tensions $\boldsymbol{T}_1 = -\,T_1\,\hat{\boldsymbol{x}}$ et $\boldsymbol{T}_2 = T_2\,\hat{\boldsymbol{y}}$ exercées par le fil sur la poulie 3 aux points de contact C_1 et C_2 respectivement. Pour décrire la dynamique du système, on choisit un repère cartésien $(O, \hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}, \hat{\boldsymbol{z}})$ où le vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{x}}$ est orienté le long de l'axe horizontal vers la droite, le vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{y}}$ est orienté le long de l'axe vertical vers le bas et le vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{z}}$ entre dans le plan vertical ci-dessus.

Les réponses doivent être exprimées en termes des grandeurs scalaires données ci-dessus, des coordonnées cartésiennes x, y, z et z et de leurs dérivées temporelles, des vecteurs de base $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$ et $\hat{\boldsymbol{z}}$, de la norme du champ gravitationnel g et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses au verso !

1. (**1.5 points**) Déterminer les équations scalaires du mouvement de chaque bloc en utilisant la loi d'action-réaction entre les blocs et la poulie.

   ....

   ....

2. (**1.0 point**) Déterminer la différence $T_2 - T_1$ entre les normes des tensions T_1 et T_2 en termes de l'accélération angulaire scalaire de la poulie $\ddot{\psi}$ où l'angle de rotation propre ψ est défini positif pour une rotation de la poulie dans le sens des aiguilles d'une montre.

   $T_2 - T_1 =$ ....

3. (**0.5 point**) Donner la condition liant les dérivées temporelles secondes des coordonnées cartésiennes des blocs 1 et 2.

   ....

4. (**0.5 point**) Exprimer l'accélération scalaire $\ddot{y}_2$ du bloc 2 en termes de l'accélération angulaire scalaire $\ddot{\psi}$ de la poulie.

   ....

5. (**1.0 point**) Déterminer l'équation du mouvement du système formé des deux blocs uniquement en termes des grandeurs scalaires m_1, m_2, g, b, μ_c, λ, M, $\dot{y}_2$ et $\ddot{y}_2$.

   ....

6. (**0.5 point**) Déterminer la vitesse scalaire limite $v_{2,\ell}$ de chute du bloc 2.

   ....

7. (**1.5 point**) Déterminer la condition pour que le système formé des deux blocs et de la poulie reste immobile (i.e. en régime statique) en termes des masses m_1 et m_2 des deux blocs.

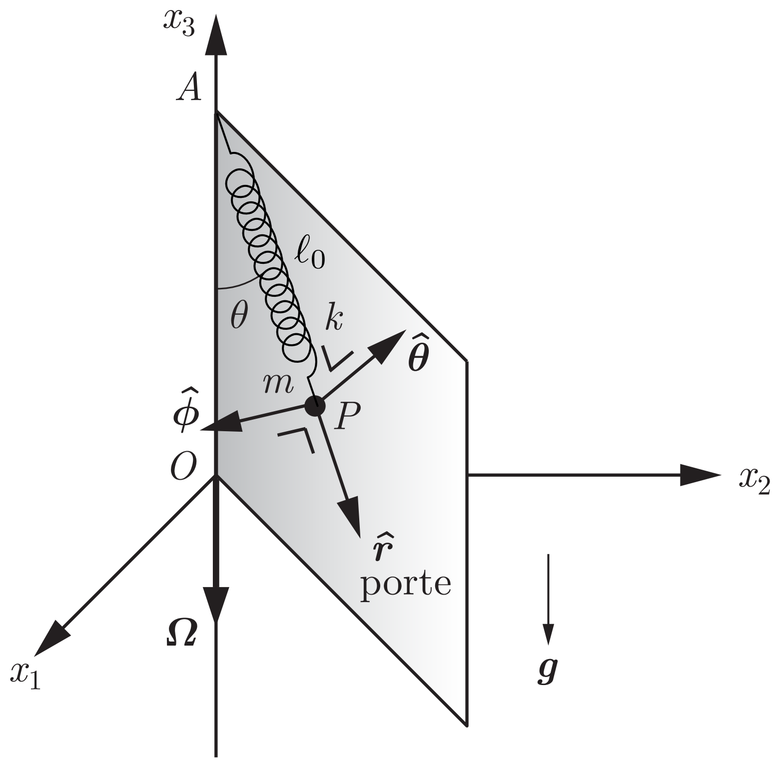
   ....

2. Ressort sur porte tournante (6.5/20 points)

Nom :

Prénom :

N° Sciper :



Un oscillateur harmonique est constitué d'un point matériel P de masse m attaché à l'extrémité d'un ressort de constante élastique k et de longueur à vide ℓ_0. L'autre extrémité est suspendue à un point fixe A de la charnière d'une porte. L'oscillateur est astreint à se déplacer dans le plan vertical de la porte qui a un mouvement de rotation autour de l'axe vertical Ox_3 avec une vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\Omega} = -\,\Omega\,\hat{\boldsymbol{x}}_3$ où $\Omega = \text{cste} > 0$. Il n'y a aucune force de frottement à considérer dans ce problème.

On attache un repère sphérique $(P, \hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$ au point matériel P de sorte que les vecteurs de base $\hat{\boldsymbol{r}}$ et $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ soient toujours contenus dans le plan vertical de la porte et que le vecteur de base $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ soit orthogonal à ce plan et orienté dans le sens des aiguilles d'une montre en vue d'avion.

Les réponses doivent être exprimées en termes des grandeurs scalaires données ci-dessus, des coordonnées sphériques r, θ et ϕ, de leurs dérivées temporelles, des vecteurs de base $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ du repère sphérique, de la norme du champ gravitationnel g et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses au verso !

1. (**1.0 point**) Déterminer les vecteurs force centrifuge $\boldsymbol{F}_c$ et force de Coriolis $\boldsymbol{F}_C$ exercés sur le point matériel P dans le référentiel relatif de la porte.

   $\boldsymbol{F}_c =$ ....

   $\boldsymbol{F}_C =$ ....

2. (**1.5 point**) Déterminer le vecteur force de réaction normale $\boldsymbol{N}$ exercé par la porte sur le point matériel P.

   $\boldsymbol{N} =$ ....

3. (**1.0 point**) Déterminer l'expression de l'énergie mécanique E du point matériel P dans le référentiel absolu du bâtiment en prenant comme référence d'énergie potentielle de pesanteur le haut de la porte qui contient le point A et comme référence d'énergie potentielle élastique l'extrémité du ressort au repos.

   $E =$ ....

4. (**1.0 point**) Dans le cas particulier où l'angle d'inclinaison θ de l'oscillateur est maintenu constant, i.e. $\theta = \theta_0 =$ cste, déterminer la condition sur la vitesse angulaire scalaire Ω pour qu'il y ait des oscillations autour d'une coordonnée radiale d'équilibre en utilisant l'équation du mouvement radial, et déterminer alors la coordonnée radiale d'équilibre r_0.

   ....

   $r_0 =$ ....

5. (**1.0 point**) Dans le cas particulier où la longueur du ressort est maintenue constante, i.e. $r = \ell =$ cste, déterminer les angles d'équilibre $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 < \pi/2$.

   $\theta_1 =$ .... $\theta_2 =$ ....

6. (**1.0 point**) Dans le cas particulier de la question précédente, déterminer la pulsation ω des petites oscillations autour de la position d'équilibre θ_2 lorsque $\Omega^2 \geqslant g/\ell$ en utilisant les développement limités au 1$^{\text{er}}$ ordre en $\alpha = \theta - \theta_2 \ll 1$ autour de θ_2,

   $$\sin\theta = \sin(\theta_2 + \alpha) \simeq \sin\theta_2 + \cos\theta_2\,\alpha$$
   $$\cos\theta = \cos(\theta_2 + \alpha) \simeq \cos\theta_2 - \sin\theta_2\,\alpha$$

   et en négligeant les termes en α^2 dans l'équation du mouvement. Montrer explicitement par calcul si $\omega > \Omega$ ou $\omega = \Omega$ ou alors $\omega < \Omega$.

   $\omega =$ ....

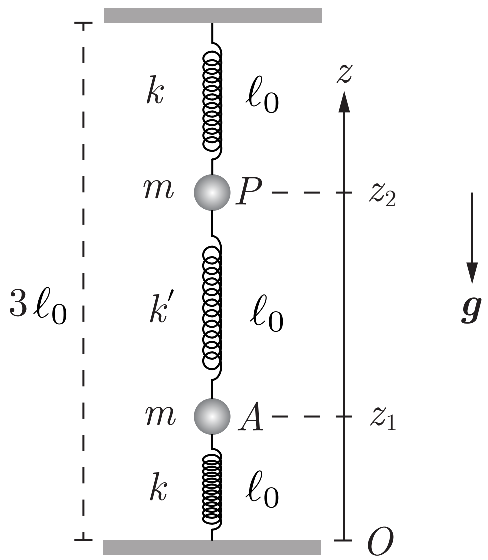
   ....

3. Oscillateurs couplés (7.0/20 points)

Nom :

Prénom :

N° Sciper :



Un oscillateur harmonique constitué d'un point matériel P de masse m est suspendu à l'extrémité d'un premier ressort de constante élastique k et de longueur à vide ℓ_0 qui est attaché à un point fixe d'un plafond. Un oscillateur harmonique constitué d'un point matériel A de masse m est suspendu à l'extrémité d'un deuxième ressort de constante élastique k' et de longueur à vide ℓ_0 qui est attaché au point P. Finalement, un troisième ressort de constante élastique k et de longueur à vide ℓ_0 est attaché au point A et fixé à l'origine O au plancher. Les oscillateurs sont astreints à se déplacer selon l'axe vertical Oz dont le vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{z}}$ est orienté vers le haut. Il n'y a aucune force de frottement à considérer dans ce problème.

La coordonnée verticale du point A est z_1 et la coordonnée verticale du point P est z_2. Ces coordonnées sont définies par rapport à l'origine O. La distance qui sépare le plafond du plancher est $3\ell_0$. La coordonnée verticale du centre de masse Z_G et la coordonnée verticale relative z sont définies comme,

$$Z_G = \frac{1}{2}\left(z_1 + z_2\right) \qquad \text{et} \qquad z = z_2 - z_1$$

Les réponses doivent être exprimées en termes des grandeurs scalaires données ci-dessus, des coordonnées verticales z_1, z_2, Z_G et z, et de leurs dérivées temporelles, du vecteur de base $\hat{\boldsymbol{z}}$, de la norme du champ gravitationnel g et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses au verso !

1. (**1.5 point**) Déterminer le vecteur force élastique $\boldsymbol{F}_{e,1b}$ exercé par le ressort du bas et le vecteur force élastique $\boldsymbol{F}_{e,1c}$ exercé par le ressort du centre sur le point matériel de masse m en A, ainsi que l'équation scalaire du mouvement absolu du point matériel A selon l'axe vertical Oz.

   $\boldsymbol{F}_{e,1b} =$ ....

   $\boldsymbol{F}_{e,1c} =$ ....

   ....

2. (**2.5 points**) Déterminer le vecteur force élastique $\boldsymbol{F}_{e,2h}$ exercé par le ressort du haut et le vecteur force élastique $\boldsymbol{F}_{e,2c}$ exercé par le ressort du centre sur le point matériel P. Déterminer aussi la force de translation $\boldsymbol{F}_t$ et l'accélération relative $\boldsymbol{a}_r\left(P\right)$ du point matériel P dans le référentiel relatif où le point A est au repos. En déduire l'équation scalaire du mouvement relatif du point matériel P selon l'axe vertical Oz.

   $\boldsymbol{F}_{e,2h} =$ ....

   $\boldsymbol{F}_{e,2c} =$ ....

   $\boldsymbol{F}_t =$ ....

   $\boldsymbol{a}_r\left(P\right) =$ ....

   ....

3. (**1.0 point**) Déterminer l'équation du mouvement du centre de masse en termes de la coordonnée verticale Z_G et de ses dérivées temporelles, et l'équation du mouvement relatif en termes de la coordonnée verticale z et de ses dérivées temporelles.

   ....

   ....

4. (**1.0 point**) Déterminer les positions d'équilibre $z_{1,0}$ et $z_{2,0}$ des points matériels A et P.

   $z_{1,0} =$ .... $z_{2,0} =$ ....

5. (**1.0 point**) Déterminer l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle totale V du système constitué des oscillateurs couplés. Prendre comme référence d'énergie potentielle de pesanteur la droite horizontale qui passe par l'origine O et comme référence d'énergie potentielle élastique l'extrémité des ressorts à vide.

   $T =$ ....

   $V =$ ....